ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS. Vol. 55, No. 3, 1986

UNE CARACTERISATION VOLUMIQUE DE CERTAINS ESPACES NORMES DE DIMENSION FINIE

PAR

MATHIEU MEYER

Equipe d'Analyse, Université Paris VI, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

ABSTRACT

We give a geometric characterization of finite dimensional normed spaces E, with a 1-unconditional basis, such that their volumetric product is minimal.

Introduction

Soient B et B^* les boules unités d'un espace normé E de dimension n et de son dual; on sait que le produit:

$$P(E) = |B|.|B^*|$$

des volumes de B et de B^* ne dépend pas de l'isomorphisme choisi de E dans R^n; on appelle $P(E)$ le produit volumique de l'espace normé E.

C'est, semble-t-il, Mahler [5] qui le premier posa le problème de trouver des bornes, fonctions de n, pour le produit volumique. Blaschke [1] pour $n = 2, 3$, puis Santalo [9], pour tout n, mais sous des hypothèses de lissité pour la frontière de B, montrèrent que $P(E) \leqq P(l_2^n)$, avec égalité si et seulement si E est isométrique à l_2^n; Saint-Raymond [8] a donné une démonstration plus simple, et complète, de ce résultat. Le problème de la borne inférieure est également abordé dans [8], où il est démontré que $P(E) \geqq P(l_1^n) = P(l_\infty^n)$, lorsque E possède une base 1-inconditionnelle; cette inégalité est aussi vérifiée lorsque E (ou E^*) est un sous-espace de $L_1(\mu)$, comme l'a démontré Reisner [6].

Enfin, dermièrement, Bourgain et Milman [2] on prouvé l'existence d'une constante K telle que $P(E) \geqq K^n . P(l_1^n)$, pour tout espace normé E de dimension n; pour $n \geqq 3$, le problème de savoir si $K = 1$ reste toujours ouvert.

Received December 25, 1985 and in revised form March 10, 1986

L'objet de ce travail est l'étude du cas d'égalité, $P(E)=P(l_1^n)$, lorque E possède une base 1-inconditionnelle; dans [8], la démonstration de l'inégalité reposait sur l'usage de transformées de Laplace de fonctions indicatrices de convexes; nous en donnons une élémentaire, à base d'arguments purement géométriques; puis nous montrons, comme le conjecturait Saint-Raymond, qu'il n'y a égalité que lorsque E peut s'écrire comme somme l_∞ ou l_1 de facteurs ayant la même décomposition. Hansen et Lima [4] ont montré que les espaces normés de dimension finie possédant cette propriété ne sont autres que ceux qui vérifient la propriété 3–2 d'intersection (3–2 I.P.): trois boules se coupant deux à deux ont une intersection non vide. On donne donc ici une caractérisation volumique des espaces de dimension finie, à base inconditionnelle, qui ont la propriété 3–2 d'intersection.

Cet article s'organise de la manière suivante: le chapitre I consiste en rappels, notations et démonstration de l'inégalité de Saint-Raymond; dans le chapitre II, qui comporte quelques résultats géométriques sur les convexes, nous envisageons le cas d'égalité.

I. Notations et resultats

I.1. Notations. Soit E un espace normé de dimension n, possédant une base 1-inconditionnelle $(e_1,\dots,e_n)$, telle que $\|e_i\|=1$, $i=1,\dots,n$; on a:

$$\left\|\sum_{i=1}^{i=n} a_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{i=n} |a_i|\, e_i\right\|, \qquad \text{pour tout } (a_1,\dots,a_n) \text{ dans } \mathbf{R}^n.$$

Plongeons E dans $\mathbf{R}^n$ de sorte que $(e_1,\dots,e_n)$ s'identifie à la base canonique; soit B la boule unité de E; C sa partie positive:

$$C=\left\{x\in B,\ x=\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i,\ x_i\geqq 0,\ 1\leqq i\leqq n\right\}$$

et, pour $1\leqq i\leqq n$, $C_i=\{x\in C,\ x_i=0\}$.

La base duale $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est aussi une base inconditionnelle de E^*, telle que $\|e_i^*\|=1$, $1\leqq i\leqq n$; on notera B^*, C^*, C_i^* les analogues de B, C et C_i, $1\leqq i\leqq n$, pour E^*.

Pour une partie I de $\{1,2,\dots,n\}$, on notera π_I la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^I$:

$$\pi_I\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i\right)=\sum_{i\in I} x_i e_i.$$

L'inconditionnalité de la base $(e_1,\dots,e_n)$ permet d'identifier $(\pi_I(E))^*$ a $\pi_I(E^*)$;

en particulier, si $B_i = B \cap \{x_i = 0\}$, $1 \leqq i \leqq n$, B_i est la boule unité de $\pi_{\{1,\dots,n\}-\{i\}}(E) = \pi_{-i}(E)$ et le polaire $(B_i)^*$ de B_i s'identifie à la boule $(B^*)_i$.

Par la suite, nous confondrons allègrement les notations affines et vectorielles. Si M et M' sont deux points de $\mathbf{R}^n$,

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \quad \text{et} \quad M' = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i e_i,$$

et si $\lambda \in [0,1]$, on notera $\lambda M + (1-\lambda)M'$ le point de coordonnées $(\lambda x_i + (1-\lambda)x'_i)_{i=1}^{i=n}$. Le produit scalaire d'un point M de E avec un point M^* de E^* sera noté $\langle M, M^*\rangle$; on a

$$\langle M, M^*\rangle = \sum_{i=1}^{i=n} x_i x_i^*, \qquad \text{si } M = (x_i)_{i=1}^{i=n} \quad \text{et} \quad M^* = (x_i^*)_{i=1}^{i=n}.$$

Si D_j, $j = 1, \dots, k$, est une famille de parties de E, on note $\operatorname{conv}(D_j, j = 1, \dots, k)$ l'enveloppe convexe des (D_j); si D est une partie de E, on note $\mathscr{E}(D)$ l'ensemble de ses points extrémaux.

Enfin, pour toute partie mesurable A de $\mathbf{R}^p$, on note $|A|$ son volume; on a $|A| = \mu_p(A)$, où μ_p est la mesure de Lebesgue produit sur $\mathbf{R}^p$.

Le résultat suivant a été démontré par Saint-Raymond dans [8] à l'aide de tranformées de Laplace de fonctions indicatrices de convexes; nous en donnons ci-dessous une démonstration totalement élémentaire, dont les étapes nous seront très utiles par la suite.

I.2. THÉORÈME. *Pour tout espace normé E de dimension n, possédant une base 1-inconditionnelle, on a*: $P(E) \geqq 4^n/n!$.

DÉMONSTRATION. Les bases (e_i) et (e_i^*) étant 1-inconditionnelles, on a: $|B| = 2^n|C|$ et $|B^*| = 2^n|C^*|$; il suffit donc de vérifier que:

$$|C| . |C^*| \geqq 1/n!. \tag{1}$$

Procédons par récurrence: (1) est évidemment vrai pour $n = 1$, puisqu'alors $|C| = |C^*| = 1$; l'hypothèse de récurrence, pour $n-1$, indique que l'on a:

$$|C_i| . |C_i^*| \geqq 1/(n-1)!, \qquad 1 \leqq i \leqq n. \tag{2}$$

Soit maintenant M un point de C, de coordonnées $(x_i)_{i=1}^{i=n}$; alors les cônes $\operatorname{conv}(M, C_i)$, $1 \leqq i \leqq n$, sont contenus dans C, et pour $i \neq j$, $\operatorname{conv}(M, C_i) \cap \operatorname{conv}(M, C_j)$ est contenu dans l'hyperplan passant par M et contenant $\{\xi_i = \xi_j = 0\}$; il suit que, $|C| \geqq \Sigma_{i=1}^{i=n} |\operatorname{conv}(M, C_i)|$, d'où par un simple calcul de volume:

$$|C| \geqq (1/n) \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i |C_i| \right), \qquad \text{pour tout } M = (x_i)_{i=1}^{i=n} \text{ dans } C. \tag{3}$$

On a de même dans E^*:

$$(3^*) \qquad |C^*| \geqq (1/n)\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^* |C_i^*|\right), \qquad \text{pour tout } M^* = (x_i^*)_{i=1}^{i=n} \text{ dans } C^*.$$

La base (e_i) étant inconditionnelle, on déduit de (3) que si

$$a = \sup\left\{(1/n)\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i |C_i|\right),\ M = (x_i)_{i=1}^{i=n} \in C\right\},$$

on a: $0 < a \leqq |C|$ et que $M_0^* = (C_i/na)_{i=1}^{i=n}$ est un point de C^*.

Il suit, en faisant $M^* = M_0^*$ dans (3*), que:

$$(4) \qquad |C| . |C^*| \geqq (n^{-2})\left(\sum_{i=1}^{i=n} |C_i|\,|C_i^*|\right).$$

L'hypothèse de récurrence, c'est à dire l'inégalité (2), permet alors d'obtenir (1).

On dit qu'un espace normé E de dimension finie est *minimal* si E possède une base 1-inconditionnelle et si $P(E) = 4^n/n!$, où n est la dimension de E; il revient au même de dire, grâce au (1) du théorème I.2, que $|C|\,|C^*| = 1/n!$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace normé E on dit que E est une M-somme (resp. une L-somme) de F et de G si l'on a $\|x\| = \sup(\|y\|, \|z\|)$ (resp. $\|x\| = \|y\| + \|z\|$, lorsque $x = y + z$, $y \in F$, $z \in G$; on notera alors: $E = F \oplus_\infty G$ (resp. $E = F \oplus_1 G$); il est bien connu que $E = F \oplus_\infty G$ si et seulement si $E^* = F^* \oplus_1 G^*$ et que $E = F \oplus_1 G$ si et seulement si $E^* = F^* \oplus_\infty G^*$. Finalement, on notera l_∞^n et l_1^n l'espace $\mathbf{R}^n$ muni des normes:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|,\ i = 1, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|.$$

On dit qu'un espace de Banach E vérifie la *propriété* 3–2 *d'intersection* si trois boules de E, se coupant deux à deux, ont une intersection non vide. Le théorème suivant résume des résultats de Hanner [3] et de Hansen et Lima [4]; il précise la structure des espaces normés de dimension finie possédant la propriété 3–2 d'intersection.

I.3. Théorème. *Soit E un espace normé de dimension finite; les assertions suivantes sont équivalentes*:

(a) *E vérifie la propriété* 3–2 *d'intersection.*

(b) *Si F et F' sont deux faces disjointes de la boule unité B de E, alors il existe deux hyperplans d'appui parallèles H et H' de B tels que $F \subseteq H$ et $F' \subseteq H'$.*

(c) *E peut s'écrire comme M-somme ou comme L-somme de facteurs de* *dimension strictement inférieure vérifiant la même propriété, si leur dimension est supérieure ou égale à* 2.

Voici enfin le principal résultat de ce travail:

I.4. THÉORÈME. *Soit E un espace normé de dimension finie*; *les assertions suivantes sont équivalentes*:

(a) *E est minimal.*

(b) *E vérifie la propriété* 3–2 *d'intersection.*

DÉMONSTRATION. Nous démontrerons que (a) implique (b) dans le paragraphe suivant.

Pour démontrer que (b) implique (a), on utilise la caractérisation (c) des espaces possédant la propriété 3–2 d'intersection donnée dans la théorème I.3: par récurrence, il est clair que ces espaces possèdent une base 1-inconditionnelle; en outre, comme l'a remarqué Saint-Raymond [8], si $E = F \bigoplus_\infty G$ ou $E = F \bigoplus_1 G$ on a

$$P(E) = p!\,q!/(p+q)!\,P(F)\,.\,P(G),$$

si F et G sont respectivement de dimension p et q; il suit, par récurrence, que $P(E) = 4^n/n!$.

II. Démonstration

On va montrer que si E est un espace minimal, alors la décomposition de E en M-somme ou L-somme se fait selon sa base inconditionnelle, en ce sens qu'il existe une partition non triviale (A, B) de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $E = \pi_A(E) \bigoplus_\infty \pi_B(E)$ ou $E = \pi_A(E) \bigoplus_1 \pi_B(E)$, où $\pi_A(E)$ et $\pi_B(E)$ sont encore minimaux. On pourra alors conclure par récurrence.

Nous aurons besoin de la notation suivante: on définit une relation R entre deux éléments a et b de $\{1, \ldots, n\}$ en posant:

$$a\,R\,b \qquad \text{si } a = b \text{ ou si } a \neq b \text{ et } e_a + e_b \in C,$$

$$a\,\not R\,b \qquad \text{dans le cas contraire.}$$

II.1. PROPOSITION. *Soit E un espace normé minimal*; *avec les notations* I.1, *on a*:

(a) *Pour toute partie I de $\{1, \ldots, n\}$, $\pi_I(E)$ et $\pi_I(E^*)$ sont minimaux.*

(b) *Si $M_0 = (|C_i^*|/n\,|C^*|)$ et $M_0^* = (|C_i|/n\,|C|)$, où n est la dimension de E, alors $M_0 \in C$, $M_0^* \in C^*$ et $\langle M_0^*, M_0 \rangle = 1$.*

(c) *Si* $M \in C$ *et* $M^* \in C^*$, *alors* $\langle M^*, M_0\rangle = 1$ *si et seulement si* $C^* = \bigcup\{\text{conv}(M^*, C_i^*),\ 1 \leqq i \leqq n\}$ *et* $\langle M_0^*, M\rangle = 1$ *si et seulement si* $C = \bigcup\{\text{conv}(M, C_i),\ 1 \leqq i \leqq n\}$.

DÉMONSTRATION. (a) Si $|C|.|C^*| = 1/n!$, on a aussi, par (4) et (2) de I.2, $|C_i|.|C_i^*| = 1/(n-1)!$, d'où, par récurrence le résultat annoncé.

(b) Avec les notations de I.2, il suit de l'égalité dans (4) que $|C| = a$ et, de manière analogue, que $|C^*| = a^*$; ainsi $M_0 \in C$, $M_0^* \in C^*$ et l'égalité dans (4) donne $\langle M_0^*, M_0\rangle = 1$.

(c) Les équivalences résultent de (3) et (3*) de I.2 ainsi que du (b) qui précède.

II.2. LEMME. *Soit E un espace normé ayant une base* 1-*inconditionnelle*; *si pour un point P de C, on a* $C = \bigcup\{\text{conv}(P, C_i),\ 1 \leqq i \leqq n\}$ *alors*

$$\{M \in C, \|M\| = 1\} = \bigcup\{\text{conv}(P, \{Q \in C_i, \|Q\| = 1\}),\ 1 \leqq i \leqq n\}.$$

DÉMONSTRATION. C'est un simple argument de convexité, laissé au lecteur.

II.3. PROPOSITION. *Soit E un espace normé minimal de dimension n*; *alors C est un polyèdre et* $\mathscr{E}(C) = C \cap \{0,1\}^n$.

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur n; le résultat est évident pour $n = 1$; supposons le vrai pour $n-1$; si E est de dimension n et minimal, la proposition II.1 indique que les $\pi_{-i}(E)$, $1 \leqq i \leqq n$, sont minimaux, et donc que les C_i sont des polyèdres tels que $\mathscr{E}(C_i) = C_i \cap \{0,1\}^{n-1}$. Pour le point M_0 de C, $M_0 = (|C_i^*|/n|C^*|)$, défini en II.1, une alternative se présente:

(1) Il existe $M \in C$, $M \neq M_0$, tel que $C = \bigcup\{\text{conv}(M, C_i),\ 1 \leqq i \leqq n\}$; d'après II.1 (b) et (c), on a $\langle M_0^*, M\rangle = 1$ et donc aussi $\langle M_0^*, P\rangle = 1$, pour tout point P de la droite MM_0; comme $C = \bigcup\{\text{conv}(M_0, C_i),\ 1 \leqq i \leqq n\}$, la demi-droite M_0M rencontre $\bigcup\{C_i, 1 \leqq i \leqq n\}$ en un point P; on a alors $C = \bigcup\{\text{conv}(P, C_i),\ 1 \leqq i \leqq n\}$ d'où $C = \text{conv}(C_i, 1 \leqq i \leqq n)$. Dans ce cas C n'a pas d'autres points extrémaux que ceux des (C_i), $1 \leqq i \leqq n$.

(2) M_0 est l'unique point de C tel que $C = \bigcup\{\text{conv}(M_0, C_i),\ 1 \leqq i \leqq n\}$ et donc tel que $\langle M_0^*, M_0\rangle = 1$. Soit alors $P_i^* = (1/2)(e_i^* + M_0^*)$; d'après le lemme II.2, on a $\|P_i^*\| = 1$, $1 \leqq i \leqq n$, et donc, par le théorème de Hahn–Banach, il existe $M \in C$, tel que $\langle P_i^*, M\rangle = 1$; encore par le lemme II.2, M s'écrit $\lambda M_0 + (1-\lambda)P^i$, pour $\lambda \in [0,1]$ et point P^i de $\bigcup\{C_j, 1 \leqq j \leqq n\}$; on a donc:

$$\langle (1/2)(e_i^* + M_0^*),\ \lambda M_0 + (1-\lambda)P^i\rangle = 1.$$

On a $\lambda \neq 0$, sinon $\langle M_0^*, P^i\rangle = 1$ ce qui contredit l'unicité de M_0, car M_0 a toutes ses coordonnées non nulles. Il suit que $\langle e_i^*, M_0\rangle = 1$, $1 \leqq i \leqq n$; C est alors la partie positive de la boule unité de l_∞^n.

Dans les deux cas, C n'a qu'un nombre fini de points extrémaux, et $\mathscr{E}(C) \subset \{0,1\}^n$; comme $C \subset [0,1]^n$, on a donc: $\mathscr{E}(C) = C \cap \{0,1\}^n$, et C est bien un polyèdre.

II.4. COROLLAIRE. *Soit E un espace normé minimal de dimension n; alors $C = \operatorname{conv}\{C_i, 1 \leqq i \leqq n\}$ si et seulement si $e_1 + \cdots + e_n \notin C$; de même, $C = \{M \in \mathbf{R}^n, \pi_{-i}(M) \in C_i, 1 \leqq i \leqq n\}$ si et seulement si il existe un couple $(i,j) \subset \{1,\ldots,n\}$ tel que $i \neq j$ et $i\ R\ j$.*

DÉMONSTRATION. Si $e_1 + \cdots + e_n \in E$, alors C s'identifie à la partie positive de la boule unité de l_∞^n, et donc les C_i, $1 \leqq i \leqq n$, s'identifient à celle de l_∞^{n-1}; mais il est alors clair que $e_1 + \cdots + e_n$ n'appartient pas à $\operatorname{conv}(C_i, 1 \leqq i \leqq n)$. Inversement, si $C \neq \operatorname{conv}(C_i, 1 \leqq i \leqq n)$, alors

$$\{M \in C, \langle M_0^*, M\rangle = 1\} \cap \{\bigcup(C_i, 1 \leqq i \leqq n)\} = \varnothing;$$

par le raisonnement de la proposition II.3, il suit que M_0 est l'unique point de C tel que $\langle M_0^*, M_0\rangle = 1$ et donc $M_0 = (1,\ldots,1)$ et $e_1 + \cdots + e_n \in E$. Pour obtenir l'équivalence suivante, on applique à C^* le résultat précédent, que l'on traduit dans C par polarité.

II.5. PROPOSITION. *Soit E un espace normé minimal de dimension n, et (A,B) une partition non triviale de $\{1,\ldots,n\}$; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Pour tout $a \in A$ et $b \in B$, on a: $a\ R\ b$ (i.e. $e_a + e_b \in C$).*

(b) *$E = \pi_A(E) \oplus_\infty \pi_B(E)$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que (b) implique (a); pour montrer l'implication inverse, trois étapes nous seront nécessaires:

(1) Pour toutes parties A' de A et B' de B, telles que $\Sigma_{a\in A'} e_a \in C$ et $\Sigma_{b\in B'} e_b \in C$, alors $\Sigma_{a\in A'} e_a + \Sigma_{b\in B'} e_b \in C$.

La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal de $A' \cup B'$: par définition de R, c'est vrai pour $|A' \cup B'| = 2$; supposons maintenant que c'est vrai pour $|A' \cup B'| = p-1$; pour $|A' \cup B'| = p$, soit $f \in E$, $f = \Sigma_{a\in A'} e_a + \Sigma_{b\in B'} e_b$; alors $f \in \pi_{A'\cup B'}(E)$, qui est un espace minimal, d'après II.1; comme $a\ R\ b$, pour tout $a \in A'$ et $b \in B'$, on a par le corollaire II.4:

$$\pi_{A'\cup B'}(E) \cap C$$

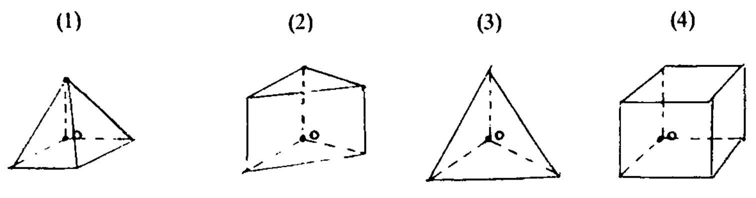
$$= \{M \in \pi_{A'\cup B'}(E),\ \pi_{-i}(M) \in \pi_{-i}(\pi_{A'\cup B'}(C)), \text{ pour tout } i \in A' \cup B'\};$$

l'hypothèse de récurrence et l'inconditionnalité de (e_i) indiquent que $\pi_{-i}(f) \in \pi_{-i}(\pi_{A' \cup B'}(C))$, $i \in A' \cup B'$; il suit que $f \in \pi_{A' \cup B'}(C) \subset C$.

(2) On a $\mathscr{E}(C) = \pi_A(\mathscr{E}(C)) \times \pi_B(\mathscr{E}(C))$; il est clair que le premier membre est contenu dans le second; soit maintenant $x \in \pi_A(\mathscr{E}(C))$ et $y \in \pi_B(\mathscr{E}(C))$; comme $\mathscr{E}(C) \subset \{0,1\}^n$ (par II.3), on a: $x = \Sigma_{a \in A'} e_a$ et $y = \Sigma_{b \in B'} e_b$, où A' et B' sont respectivement des parties de A et de B. Il suit de (1) que $z = x + y \in C$, et donc, comme $\mathscr{E}(C) = C \cap \{0,1\}^n$ (par II.3), que $z \in \mathscr{E}(C)$.

(3) On a: $E = \pi_A(E) \oplus_\infty \pi_B(E)$; il suffit de voir, par dualité et inconditionnalité de la base (e_i) que $E^* = \pi_A(E^*) \oplus_1 \pi_B(E^*)$, et donc que pour tout $x^* \in C^*$, on a $\|x^*\| = \|\pi_A(x^*)\| + \|\pi_B(x^*)\|$, ce qui résulte immédiatement de l'égalité (2) et du fait que des formes linéaires continues atteignent leur maximum sur des points extrémaux des convexes compacts.

II.6. Lemme. *Si E est un espace normé minimal de dimension* 3, *alors, à une permutation près de e_1, e_2 et e_3, le convexe C a l'une des formes suivantes*:



Démonstration. Si $E \not\in l^3_\infty$ et l^3_1, C n'a ni la forme (3) ni la forme (4); par le corollaire II.4, $C = \mathrm{conv}(C_i, 1 \leqq i \leqq n) = \{M \in E,\ \pi_{-i}(M) \in C_i,\ 1 \leqq i \leqq n\}$; par II.3, $\mathscr{E}(C) = C \cap \{0,1\}^n$; on se convainc aisément qu'il reste alors à choisir, à une permutation près, entre les formes (1) et (2).

II.7. Lemme. *Soit E un espace normé minimal de dimension* 4; *supposons que* $1\ R\ 2$, $2\ R\ 3$, $3\ R\ 4$, $1 \not R\ 3$ *et* $2 \not R\ 4$; *on a alors*: $4\ R\ 1$.

Démonstration. Supposons que $4 \not R\ 1$; comme les $\pi_{-i}(E)$, $1 \leqq i \leqq n$, sont aussi minimaux, on déduit du lemme II.6 que C_1 et C_4 ont la forme (2) et que C_2 et C_3 ont la forme (1); par dualité, C_1^* et C_4^* ont la forme (1), et C_2^* et C_3^* ont la forme (2) décrites dans ce lemme. Comme il est clair que $E \neq l^4_\infty$ et l^4_1, il suit du corollaire II.4 que $C = \mathrm{conv}(C_i, 1 \leqq i \leqq 4)$ et que $C = \{M \in E,\ \pi_{-i}(M) \in C_i,\ 1 \leqq i \leqq 4\}$, et de même pour C^*; il en résulte que les points P et P^*, de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sont respectivement dans $C^{\bullet}$et dans C^*; il suit, par l'inégalité (3) de I.1 que:

$$|C| \geqq \sum_{i=1}^{i=4} |\text{conv}(P, C_i)| = (\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) = \tfrac{5}{24},$$

puisque, par II.6, $|C_1| = |C_4| = \frac{1}{2}$ et $|C_2| = |C_3| = \frac{1}{3}$.

On a de même: $|C^*| \geqq \frac{5}{24}$; ainsi $|C| . |C^*| \geqq (\frac{5}{24})^2$ ce qui est absurde car, comme E est minimal, on a $|C| . |C^*| = \frac{1}{24} = 1/4!$.

II.8. Démonstration de (b) implique (a) du Théorème I.4. On montre que si E est un espace normé minimal de dimension n, alors E vérifie le critère (c) du théorème I.3; c'est évidemment vrai pour $n = 1$; on procède par récurrence, en supposant que c'est vrai pour tout espace F minimal de dimension inférieure ou égale à $n - 1$.

Si E est minimal, E^* l'est aussi, ainsi que tous les $\pi_{-i}(E)$ et $\pi_{-i}(E^*)$, $1 \leqq i \leqq n$; ces derniers s'écrivent donc comme des L-sommes ou des M-sommes d'espaces minimaux; par dualité, en changeant éventuellement le rôle de E et de E^*, on peut supposer que, pour un $x \in \{1, \ldots, n\}$, on a:

$$\pi_{-x}(E) = \pi_A(E) \oplus_\infty \pi_B(E),$$

où (A, B) forme une partition non triviale de $\{1, \ldots, n\} \setminus \{x\}$ (c'est en fait l'hypothèse de récurrence). Une alternative se présente alors, où (1) n'exclut pas (2):

(1) $x R a$, pour tout $a \in A$.

(2) $x R b$, pour tout $b \in B$.

(3) $x \not R y$, pour tout $y \in A \cup B$.

(4) Les propriétés (1), (2) et (3) ne sont pas vérifiées.

Dans les cas (1), (2) et (3), on a respectivement:

(1') $z R a$, pour tous $z \in B \cup \{x\}$ et $a \in A$.

(2') $z R b$, pour tous $z \in A \cup \{x\}$ et $b \in B$.

(3') En passant au dual, $x^* R y^*$, pour tout $y^* \in A \cup B$.

Il suit de la proposition II.5 que l'on a respectivement:

(1") $E = \pi_A(E) \oplus_\infty \pi_{B \cup \{x\}}(E)$.

(2") $E = \pi_B(E) \oplus_\infty \pi_{A \cup \{x\}}(E)$.

(3") $E^* = \pi_{\{x\}}(E^*) \oplus_\infty \pi_{-x}(E^*)$, et donc $E = \pi_{\{x\}}(E) \oplus_1 \pi_{-x}(E)$.

Le cas (4) reste à envisager: on se ramène, par symétrie entre A et B, au cas où il existe $a \in A$, $b_1 \in B$ et $b_2 \in B$ tels que $x \not R a$, $x \not R b_1$ et $x R b_2$. Soit alors $B_1 = \{b \in B,\ b \not R x\}$ et $B_2 = \{b \in B,\ b R x\}$; le couple (B_1, B_2) forme une partition non triviale de B; si l'on a montré que $b_1 R b_2$, pour tous $b_1 \in B_1$ et $b_2 \in B_2$, on aura:

(4') $z R b_2$, pour tous $z \in A \cup B_1 \cup \{x\}$ et $b_2 \in B_2$.

Il résultera alors de la proposition II.5 que:

(4″) $E = \pi_D(E) \oplus_\infty \pi_{B_2}(E)$, où $D = A \cup B_1 \cup \{x\}$.

Soit donc $b_1 \in B_1$ et $b_2 \in B_2$; on a: $x \not R b_1$, $x R b_2$, $x \not R a$, et, comme $\pi_{-x}(E) = \pi_A(E) \oplus_\infty \pi_B(E)$, on a aussi: $a R b_1$ et $a R b_2$. En posant $x = 1$, $b_2 = 2$, $a = 3$, $b_1 = 4$ et $G = \{x, a, b_1, b_2\}$, on obtient: $1 R 2$, $2 R 3$, $3 R 4$, $1 \not R 3$ et $1 \not R 4$ dans l'espace minimal $\pi_G(E)$; il résulte alors du lemme II.7 que $4 R 2$, et donc que $b_1 R b_2$.

Note. Nous venons d'apprendre que S. Reisner, de l'université d'Haifa, a récemment démontré, par une toute autre méthode, notre théorème I.4; dans un autre travail [7], S. Reisner vient aussi de caractériser les zonoïdes de produit volumique minimal.

Bibliographie

1. W. Blaschke, *Vorlesungen über Differential Geometrie II*, Springer, Berlin, 1923.

2. J. Bourgain et V. Milman, *On Mahler's conjecture on the volume of a convex symmetric body and its polar*, preprint.

3. O. Hanner, *Intersections of translates of convex bodies*, Math. Scand. **4** (1956), 65–87.

4. A. B. Hansen et A. Lima, *The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3-2 intersection property*, Acta Math. **46** (1981), 1–23.

5. K. Mahler, *Ein Übertragungsprizip für konvexe Körper*, Casopis Pest Math. Fys. **68** (1939), 93–102.

6. S. Reisner, *Random polytopes and the volume-product of symmetric convex bodies*, Math. Scand. **58** (1986).

7. S. Reisner, *Zonoids with minimal volume-product*, Math. Z., to appear.

8. J. Saint-Raymond, *Sur les volumes des corps convexes symétriques*, Sem. d'Initiation à l'Analyse, 20^e année (1980–81), n° 11, 25 p.

9. L. A. Santalo, *Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones*, Portugal Math. **8** (1949), 155–161.